Министерство науки и образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе № 2

по дисциплине «Программная инженерия задач вычислительной математики»

**Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.**

ОГУ 09.03.04.4024. 704 ПЗ

Руководитель

канд. техн. наук, доцент

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Е. А. Шнякина

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г.

Исполнитель

Студент группы 22ПИнж(б)РПиС-1

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ И.В. Федоров

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 г.

Оренбург 2024

**Метод Гаусса решения СЛАУ**

Необходимо найти решение системы вида:

,

которая в матричной записи имеет вид:

*Ax=b*.

Здесь  - матрица коэффициентов,  - вектор неизвестных,  - вектор правой части.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если более одного.

Если матрица А квадратная и , то она называется невырожденной (неособенной).

Система линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными, имеющая невырожденную матрицу коэффициентов, совместна и имеет единственное решение.

Метод Гаусса применяется для решения совместных систем с невырожденной матрицей коэффициентов. Суть метода состоит в последовательном исключении неизвестных. В результате равносильных преобразований матрица коэффициентов принимает треугольный вид. Далее, начиная с последнего, вычисляются все неизвестные. Таким образом, метод Гаусса состоит из двух этапов:

* 1. Прямой ход – приведение системы вида к системе , где *С* – верхняя треугольная матрица.
  2. Обратный ход – последовательное, начиная с последнего, вычисление неизвестных.

Первый шаг прямого хода:

Разделим на *a11*≠ 0 (ведущий элемент) первую (ведущую) строку матрицы А и вектора , получаем элементы первой строки матрицы *С* и вектора *d*:

, .

Обнуляем элементы первого столбца матрицы А, начиная со второй строки :

Второй шаг прямого хода:

Ведущим элементом становится , разделим на него вторую (ведущую) строку матрицы *А(1)* и вектора b(1), получим вторую строку матрицы *С* и вектора *d*

, .

Обнуляем элементы второго столбца матрицы А, начиная с третей строки :

Аналогично выполняются, до n-1, остальные шаги прямого хода. На последнем, n-ом шаге, выполняется только деление последней (n-ой – ведущей) строки матрицы А(n-1) и вектора b(n-1) на диагональный элемент , и заполняется последняя строка матрицы С и вектора d:

, .

После прямого хода система уравнений принимает вид:



Из последнего, n-го, уравнения определяем . Далее, подставим найденное значение *xn*, в *n-1* уравнение и выразим через него *xn-1*:

.

Выполняя аналогичные действия, получим общую формулу для нахождения элементов вектора неизвестных

.

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса

*Прямой ход*

* + 1. Для
  1. Для вычислить
  2. вычислить
  3. Для
     1. Для вычислить
     2. вычислить

*Обратный ход*

* + 1. 
    2. Для вычислить

**Модификации метода Гаусса**

При выполнении прямого хода метода Гаусса происходит деление ведущей - *i*-ой строки на ведущий (диагональный) элемент - . Если , то дальнейшее решение системы методом Гаусса становится невозможным. Если принимает значение, близкое к нулю, то это может привести к увеличению погрешности. Чтобы исключить возникновение подобных случаев, на каждом шаге прямого хода производится поиск в обрабатываемой подсистеме максимального по модулю элемента и перестановка строк и/или столбцов таким образом, чтобы данный элемент встал на место ведущего.

В схему решения СЛАУ методом Гаусса вносятся соответствующие изменения: перед шагом 1.1 включается поиск максимального по модулю элемента и перестановка местами его и ведущего элементов.

* + - 1. Выбор ведущего элемента по строке

Данная модификация предполагает поиск максимального по модулю элемента в ведущей строке ( и перестановку столбца, содержащего максимальный по модулю элемент и столбца, содержащего ведущий элемент местами. Перестановка столбцов требует отслеживания индексов элементов вектора *Х* и соответствующее переопределение неизвестных.

* + - 1. Выбор ведущего элемента по столбцу

Во второй модификации поиск максимального элемента осуществляется по столбцу, содержащему ведущий элемент (. Далее переставляются местами строки, содержащие максимальный по модулю элемент и ведущий. Вместе со строками матрицы *А* переставляются местами соответствующие им строки вектора правой части *b*.

3.Выбор ведущего элемента по всей матрице

Третья модификация объединяет две предыдущие, в данном случае поиск максимального по модулю элемента осуществляется во всей матрице преобразуемой на данном этапе подсистемы.

В данной лабораторной работе я использовал модифицированный метод Гаусса с поиском строки с максимальным элементом.

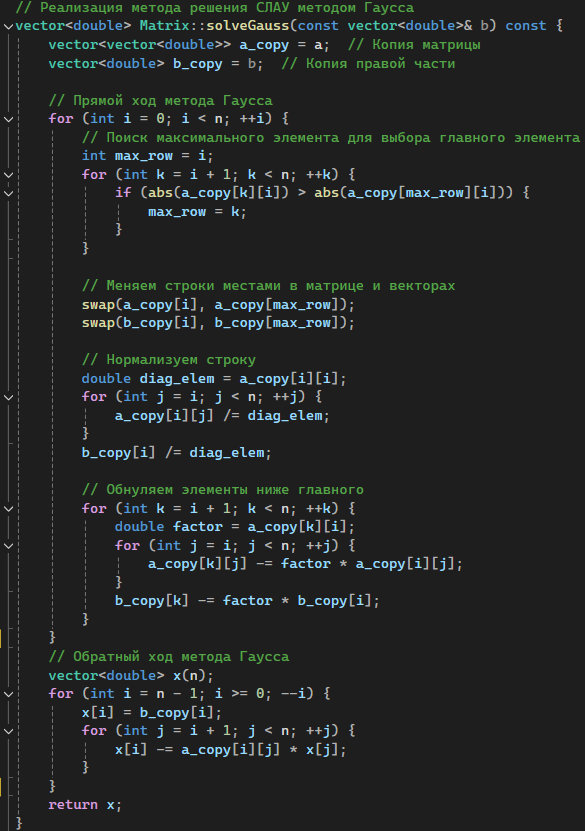


Рисунок 1. Реализация метода Гаусса.

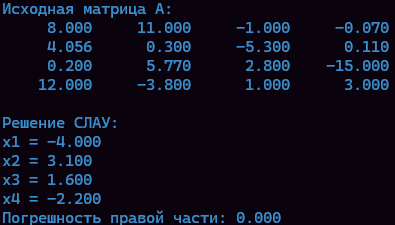


Рисунок 2. Результат метода Гаусса и погрешность

**Обратная матрица**

Обратной по отношению к данной является матрица *А-1*, которая, при умножении как справа, так и слева на указанную матрицу, дает единичную:

*А А-1= А-1А=Е.*

Обозначим .

Тогда



Пусть

, …,  - столбцы матрицы *Х*.

, …,  - столбцы матрицы Е.

Тогда произведение *АХ=Е* можно представить в виде системы:



Решая каждую систему  методом Гаусса, получаем векторы *Хi*, являющиеся столбцами обратной матрицы.

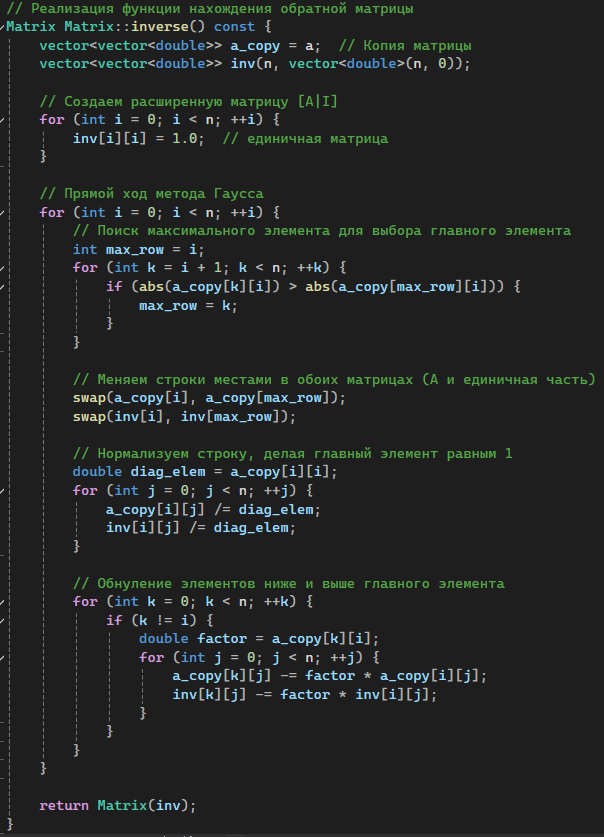


Рисунок 3. Метод нахождения обратной матрицы

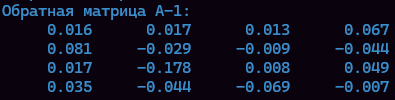


Рисунок 4. Результат обратной матрицы

**Нахождение определителя матрицы**

В ходе приведения матрицы А к верхней треугольной матрице С, сформируем ещё одну матрицу, состоящую из ведущих строк каждого шага прямого хода метода Гаусса. Матрица будет иметь вид:

.

Определители матриц *А* и *А(n-1)* равны, т.е.:



Получаем, что определитель матрицы равен произведению всех ведущих элементов, получаемых в процессе прямого хода метода Гаусса.

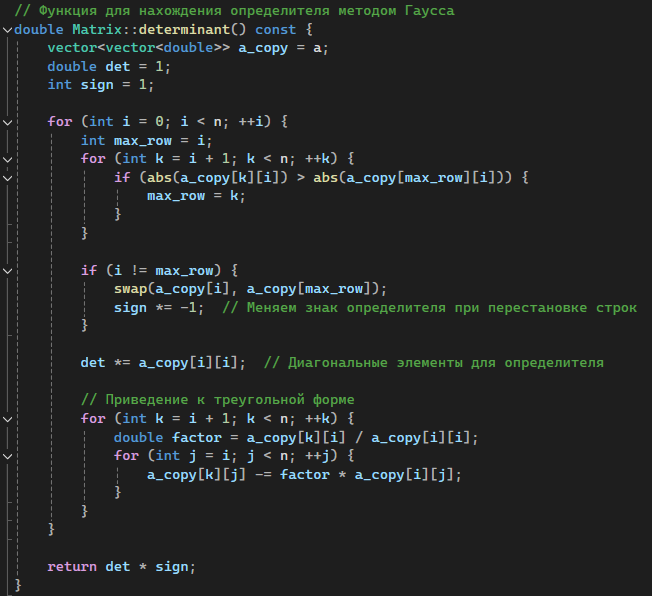


Рисунок 5. Метод нахождения определителя



Рисунок 6. Результат метода нахождения определителя Гаусса

**LU-разложение СЛАУ**

Если угловые миноры квадратной матрицы *А* отличны от нуля, то существуют такие нижняя *L* и верхняя *U* треугольные матрицы, что *А=LU*.

Если элементы диагонали одной из матриц *L* или *U* ненулевые (фиксированы), то такое разложение единственно.

Обычно матрицы *L* и *U* имеют вид:

1.  

2. 

В дальнейшем, будем использовать первый вид разложения.

Из общего вида элемента произведения *А=LU*, а также структуры матриц *L* и *U* следуют формулы для определения элементов этих матриц:



Такимобразом, исходная система  принимает вид: *LUx=b*. Обозначим *Ux=y.* Тогда решение системы  сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов:

Первоначально из системы вычисляется вектор *у*. В координатной форме система имеет вид:

Из первого уравнения . Для вычисления остальных элементов вектора *y ()* будем использовать расчетную формулу:

.

Затем, из системы *Ux=y:*

вычисляется вектор *х*. Из последнего уравнения находим

Далее, через уже найденные значения элементов вектора *х*, вычисляются остальные. Формула, для вычисления *xi* , где , имеет вид:

Алгоритм решения СЛАУ методом LU-разложения

*Факторизация матрицы А*

* + 1. Для
  1. Задать
  2. Вычислить
     1. Для

2.1 для вычислить

2.2

2.3 для вычислить

*Решение системы*

* + 1. Для вычислить .

*Решение системы Ux = y*

* + 1. Для вычислить

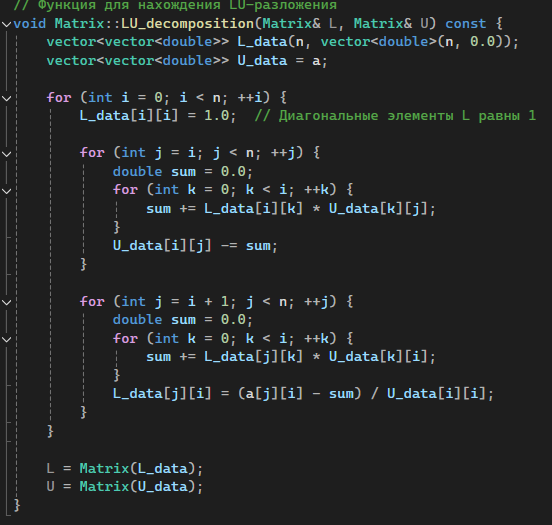


Рисунок 7. Метод нахождения LU-разложения

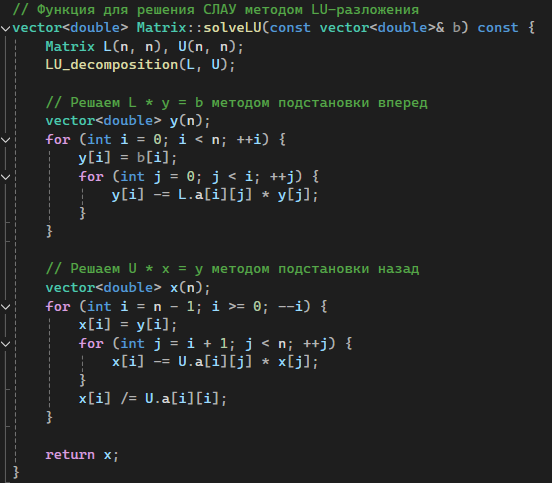


Рисунок 8. Метод нахождения решения LU-разложением



Рисунок 9. Результат нахождения решения LU-разложением

Используя *LU* – разложение, определитель матрицы *А* равен:

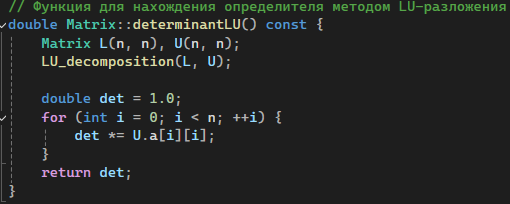


Рисунок 10. Метод нахождения определителя LU-разложением



Рисунок 11. Результат нахождения определителя LU-разложением